

Evolución de curvas y el laplaciano orientado

J.Sanguino

Grupo de Bioingeniería de la E.U.I.T.I. (U.P.M.)

10 de mayo de 2011

1. Introducción

Si $I(x, y, t) = k$ es una *línea de nivel* que une los puntos de igual intensidad lumínica en una imagen en *niveles de grises*, me interesa establecer y explicar el *por qué* de las igualdades:

$$\partial_t I = \partial_{\xi\xi} I = \|\nabla I\| \operatorname{curv}(I) = \|\nabla I\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right)$$

donde $\operatorname{curv}(I)$ es la curvatura de la curva $I(x, y, t) = k$.

2. Evolución de las curvas

2.1. Nociones básicas de Geometría diferencial

El concepto intuitivo de *curva* podría considerarse, como subconjuntos unidimensionales de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Una manera natural de definir estos subconjuntos es mediante el cálculo diferencial. A partir de ahora se dirá que una función real de variable real es *diferenciable* si es C^∞ en cada uno de sus puntos. Así pues, una definición aceptable de *curva*, para desarrollar los objetivos propuestos, sería:

Definición: Se llama *curva parametrizada diferenciable* a toda aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} : & (a, b) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & p & \longmapsto \mathbf{C}(p) \end{array}$$

diferenciable con $n = 2$ ó 3 . ■

A la primera derivada de la función $\mathbf{C}$ en el punto p :

$$\mathbf{C}'(p) = \frac{d\mathbf{C}}{dp}$$

que es un vector tangente a la curva $\mathbf{C}$ en p se le denomina vector *velocidad*. Sin embargo al vector *velocidad* normalizado recibe el nombre de vector *tangente* y se representa mediante:

$$\mathbf{t}(p) = \frac{\mathbf{C}'(p)}{\|\mathbf{C}'(p)\|}$$

Definición: Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\mathbf{C}$ es **regular** si

$$\frac{d\mathbf{C}}{dp} \neq 0$$

■

A partir de ahora, todas las curvas que se consideren serán *regulares* mientras no se diga lo contrario.

Es importante señalar, que es posible, encontrar una nueva parametrización de la curva parametrizada por $\mathbf{C}$ tal que la derivada nos dé automáticamente el vector *tangente*. Esta nueva parametrización recibe el nombre de **parametrización por longitud de arco**. Esto es, utilizando la misma letra para identificar tanto a la parametrización inicial como a la *parametrización por longitud de arco* se tendría:

$$\mathbf{C}'(s) = \frac{d\mathbf{C}}{ds} = \mathbf{t}(s)$$

La *parametrización longitud de arco* siempre se puede obtener a partir de una parametrización cualquiera de la curva, mediante la relación:

$$s(p) = \int_0^p \|\mathbf{C}'(r)\| dr \implies s'(p) = \frac{ds}{dp} = \|\mathbf{C}'(p)\|$$

De ahora en adelante, siempre que se considere una parametrización con parámetro s se supondrá que es la *parametrización por longitud de arco*, mientras no se diga lo contrario.

Se trata de medir ahora la variación del vector *tangente* a lo largo de la trayectoria $\mathbf{C}$. Para ello se considera la derivada de $\mathbf{t}(s)$, esto es:

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \mathbf{t}'(s)$$

Es inmediato percatarse que este vector es perpendicular al vector *tangente*. La razón se basa en que:

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1 \implies 2\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$$

Así pues, se escribirá:

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

al vector $\mathbf{n}(s)$ se le denomina **normal principal o euclídea**. Según esta definición, los vectores $\mathbf{t}'$ y $\mathbf{n}$ tienen la misma dirección y **sentido**. A la expresión

$$\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$$

se le llama **curvatura euclídea**. De esta forma la *curvatura* mide cómo de rápido (velocidad) la curva tiende a salirse (doblar) de la recta tangente que pasa por s en un entorno de s . Hay autores (ver [?]) que a la derivada del vector *tangente* le denominan **vector curvatura**:

$$\kappa(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

Este vector siempre apunta hacia el sentido interior (de la región donde se *dobra*) a la curva, esto es, hacia la parte *cóncava*. El plano que determinan el vector *tangente* y la normal recibe el nombre de **plano osculador**.

Es interesante resaltar que cuando se tratan de curvas planas, tiene sentido definir el concepto de **curvatura con signo**. En efecto, sea $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ la base natural de $\mathbb{R}^2$, entonces se define el *vector normal* $\mathbf{n}(s)$ de forma que la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ tenga la misma **orientación** que la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Para ello, dado:

$$\mathbf{t}(s) = (t_1(s), t_2(s)) \quad (1)$$

se toma $\mathbf{n}(s)$ de la forma:

$$\mathbf{n}(s) = (-t_2(s), t_1(s)) \quad (2)$$

ya que:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t_1(s) & t_2(s) & 0 \\ -t_2(s) & t_1(s) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1(s) & t_2(s) \\ -t_2(s) & t_1(s) \end{vmatrix} \mathbf{k} = \|\mathbf{t}(s)\|^2 \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Se define entonces la **curvatura con signo** al valor:

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa_0(s) \mathbf{n}(s)$$

que puede ser negativa o positiva. Esto implica que $\mathbf{n}$ ya no tiene por qué tener el mismo sentido que $\mathbf{t}'$. Es claro que:

$$\kappa(s) = |\kappa_0(s)|$$

Una manera rápida de saber si la *curvatura con signo* es positiva o negativa, es que un caminante se desplace por la curva en sentido que marque el vector tangente $\mathbf{t}$. Entonces todos los *dobles* de la curva que queden a la derecha del caminante (*concavidades*) tendrá signo negativo y todos los que queden a su izquierda (*convexidades*) tendrá signo positivo.

Resulta que los conceptos definidos de vector *tangente*, *normal*, *curvatura con o sin signo* no dependen de la situación de la curva sobre el plano. Diremos que son *invariantes frente a movimientos o transformaciones afines*. Para nosotros un **movimiento** será una *traslación* y una *rotación directa*, esto es una transformación de la forma:

$$Y = V + RX \equiv MX$$

donde V es una traslación y R es una matriz 2×2 con determinante positivo, que representa una rotación. En estas circunstancias se puede establecer el siguiente resultado:

Teorema 1 (Teorema fundamental de curvas en el plano) 1. Sea $\kappa_0(s)$ una función real diferenciable entonces existe una curva $\mathbf{x} = \mathbf{C}(s)$ parametrizada por la longitud de arco, cuya curvatura con signo es $\kappa_0(s)$.

2. Si $\mathbf{y} = \mathbf{D}(s)$ es una curva parametrizada por longitud de arco con una curvatura con signo $\kappa_0(s)$ entonces existe un **movimiento o transformación afín** tal que $\mathbf{D}(s) = M\mathbf{C}(s)$.

La demostración del teorema se puede consultar en [?].

Es posible establecer una expresión para la curvatura cuando la parametrización de la curva es cualquiera y no necesariamente la parametrización por longitud de arco. En efecto, puede probarse que (ver [?, ?], por ejemplo):

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{C}_p \wedge \mathbf{C}_{pp}\|}{\|\mathbf{C}_p\|^3} \quad (3)$$

mientras que en el caso de curvas planas, la *curvatura con signo* vendría dada por:

$$\kappa_0 = \frac{\mathbf{C}_p \wedge \mathbf{C}_{pp}}{\|\mathbf{C}_p\|^3} = \frac{x_p \cdot y_{pp} - y_p \cdot x_{pp}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \quad (4)$$

2.2. Teoría de evolución de curvas planas

La teoría sobre la *evolución* de las curvas planas¹ ya ha sido tratada en distintas ocasiones (ver [?, ?] y las referencias allí mencionadas, [?]). Una de las más importantes se aplica en diferente campos como: el crecimiento de cristales, propagación del fuego y visión artificial, estableciendo que la curva tiende a *deformarse* en dirección a la *normal euclídea* con una velocidad *función de la curvatura euclídea* (ver [?, ?] y las referencias allí mencionadas). Para ello se considera una **curva cerrada simple diferenciable** o *curva de Jordan diferenciable*. Esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{C} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \mathbf{C}(p) = (x(p), y(p)) \end{aligned}$$

Se supone que con esta parametrización al recorrer la curva, el interior queda a la izquierda. Además se añade la condición de que la aplicación tenga las derivadas necesarias (por lo menos hasta el orden 2) y

$$\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(b) \quad \text{e inyectiva en } [a, b)$$

Dicho de otra forma que la curva sea *difeomorfa* a S^1 . Es por ello que muchas veces se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} : S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \mathbf{C}(p) = (x(p), y(p)) \end{aligned}$$

Puesto que se trata de estudiar como evoluciona la curva plana a través del tiempo es necesario que dependa de una nueva variable que modelice el *paso* del tiempo. Esta situación, se representa de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} : S^1 \times [0, \tau) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, t) &\mapsto \mathbf{C}(p, t) = (x(p, t), y(p, t)) \end{aligned}$$

Un planteamiento razonable es que esta familia de curvas planas, que se obtienen variando el parámetro t , **evolucione** de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = F(\kappa_0) \mathbf{n} \quad (5a)$$

$$\mathbf{C}(p, 0) = \gamma(p) \quad (5b)$$

donde κ_0 y $\mathbf{n}$ son la curvatura con signo y la normal euclídeas respectivamente de $\mathbf{C}$ y F una función de la curvatura. Esta ecuación de deformación evolutiva de una curva ya ha sido estudiada, como ya se ha comentado al comienzo de la sección (ver [?, ?] y las referencias allí mencionadas) en relación con diversos problemas: crecimiento de cristales, propagación de llamas y visión artificial. El planteamiento más elemental de la ecuación (5) es cuando F es la función identidad.

La ecuación (5) es básica para nuestro objetivo. Resulta que para las curvas planas, en Geometría diferencial se puede definir el concepto de **curvatura con signo**, tal y como se comentó anteriormente (ver 2.1). Con el signo de esta *curvatura* se puede deducir si la curva es *cóncava* o *convexa* esto es, si queda por encima o por debajo de la recta tangente o bien si el par $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ tiene la misma orientación que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Si suponemos una curva plana (con derivadas continuas) con un punto de inflexión, resultará que los vectores $\kappa(s) = \frac{dt}{ds}$ con $s \in V$, tendrán diferente sentidos a cada lado de este punto de inflexión.

Con esta idea de distinguir la concavidad o convexidad de la curva, se recurre a conceptos propios de la *Geometría afín* (ver [?]). En efecto, ya se ha comentado (ver 2.1) que si $\mathbf{C}(p)$ es una parametrización cualquiera de la curva, entonces el vector $\mathbf{C}_p$ es un vector tangente a la

¹En el sentido de cómo tienden a deformarse con el paso del tiempo.

curva en $\mathbf{C}(p)$. Por otra parte, el vector $\mathbf{C}_{pp}$ no tiene por qué ser ortogonal al vector $\mathbf{C}_p$ ya que la parametrización no es por longitud de arco. Sin embargo, $\mathbf{C}_{pp}$ siempre está situado en la parte *interior* a la curva. Esto nos permite considerar el área del paralelogramo generado por los vectores $\{\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_{pp}\}$.

Por $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ se considera el determinante formado por los dos vectores, donde la primera columna son las componentes del vector $\mathbf{C}$ y la segunda columna los del vector $\mathbf{D}$. Es decir:

$$[\mathbf{C}, \mathbf{D}] = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

si este valor es positivo, entonces ambos vectores están positivamente orientados y si es negativo no.

Con esta idea se define una parametrización $\boxed{u}$ de la curva, tal que el área del paralelogramo formado por la *velocidad* y la *aceleración* sea uno. Esto es:

$$[\mathbf{C}_u, \mathbf{C}_{uu}] = 1$$

Si $\mathbf{C}(p) = (x(p), y(p)) = \mathbf{C}(u(p)) = (x(u(p)), y(u(p)))$ entonces:

$$x_p = x_u \cdot \frac{du}{dp}$$

$$x_{pp} = x_{uu} \left(\frac{du}{dp} \right)^2 + x_u \frac{d^2u}{dp^2}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_{pp}] &= x_p y_{pp} - x_{pp} y_p = \\ &= x_u \frac{du}{dp} \cdot y_{uu} \left(\frac{du}{dp} \right)^2 - y_u \frac{du}{dp} \cdot x_{uu} \left(\frac{du}{dp} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{du}{dp} \right)^3 [\mathbf{C}_u, \mathbf{C}_{uu}] = \left(\frac{du}{dp} \right)^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Se obtiene la *métrica afín*:

$$g(p) = [\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_{pp}]^{1/3}$$

donde el valor de g será positivo o negativo según la convexidad o concavidad de la curva. Se define el parámetro **longitud de arco afín**:

$$u(p) = \int_0^p g(r) dr$$

Con este parámetro u se define entonces el **vector tangente afín** $\mathbf{C}_u$, el **vector normal afín** $\mathbf{C}_{uu}$ y la *curvatura afín*

$$\mu = [\mathbf{C}_{uu}, \mathbf{C}_{uuu}]$$

Es inmediato que:

$$u'(p) = g(p) = \frac{du}{dp} \quad (7)$$

y por la Regla de la cadena se obtiene:

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{C}_p \frac{dp}{du} \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_{uu} = \mathbf{C}_{pp} \left(\frac{dp}{du} \right)^2 + \mathbf{C}_p \frac{d^2p}{du^2} \quad (9)$$

Según se ha visto la evolución de una curva (en la geometría euclídea) vendría dada de la forma:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \boldsymbol{\kappa}(s) = \kappa_0(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{C}_{ss}$$

Esto motiva que en geometría afín se establezca una ecuación de evolución análoga de la forma:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{C}_{uu}$$

Ahora se trata de expresar en *vector afín normal* $\mathbf{C}_{uu}$ en función de los equivalentes euclídeos: tangente, normal, etc. para ello se utiliza la ecuación (9). Si en lugar del parámetro p se considera el parámetro *longitud de arco euclídeo*, sería:

$$\mathbf{C}_{uu} = \mathbf{C}_{ss}(s) \left(\frac{ds}{du} \right)^2 + \mathbf{C}_s(s) \frac{d^2s}{du^2} = \boldsymbol{\kappa}(s) \left(\frac{ds}{du} \right)^2 + \mathbf{t}(s) \frac{d^2s}{du^2} = \kappa_0(s)\mathbf{n}(s) \left(\frac{ds}{du} \right)^2 + \mathbf{t}(s) \frac{d^2s}{du^2}$$

Además, puesto que:

$$g(s) = [\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_{ss}]^{1/3} = [\mathbf{t}, \kappa_0\mathbf{n}]^{1/3} = \kappa_0^{1/3}(s)[\mathbf{t}, \mathbf{n}] = \kappa_0^{1/3}(s)$$

Además teniendo en cuenta que:

$$\frac{ds}{du} = \frac{1}{\kappa_0^{1/3}(s)}$$

entonces:

$$\frac{d^2s}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{ds}{du} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{du} \right) \cdot \frac{ds}{du} = -\frac{1}{3} \kappa_0^{-4/3} (\kappa_0)_s \kappa_0^{-1/3}(s)$$

De esta forma, la ecuación de los vectores *tangente y normal afín* en función de los vectores *normal y tangente euclídeos* serían:

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{C}_s \frac{ds}{du} = \mathbf{t}(s) \cdot \kappa_0^{-1/3} \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_{uu} = \boldsymbol{\kappa}(s) \left(\frac{ds}{du} \right)^2 + \mathbf{t}(s) \frac{d^2s}{du^2} = \kappa_0(s)^{1/3} \mathbf{n}(s) - \frac{1}{3} \frac{(\kappa_0)_s}{\kappa_0^{5/3}} \cdot \mathbf{t}(s) \quad (11)$$

Se sabe que en el caso euclídeo, la curvatura κ es constante en los arcos circulares y en las rectas. Para el resto de las curvas en cada punto $\mathbf{x}$ de la curva se puede definir la *circunferencia oscultriz* cuyo radio viene dado por $\frac{1}{\kappa}$ y su centro está situado en la dirección de $\mathbf{n}$.

En el caso *afín*, las cónicas: parábola, elipse y la hipérbola, son las únicas curvas con *curvatura afín constante* ($\mu = 0$, $\mu > 0$ y $\mu < 0$ respectivamente). De hecho la elipse es la única curva *cerrada* con curvatura constante. En el caso afín, también se habla de *cónica oscultriz* para los puntos $\mathbf{x}$ de la curva, que no sean *puntos de inflexión*, considerándose parábola, elipse o hipérbola oscultriz, dependiendo de que su *curvatura afín* μ en $\mathbf{x}$ sea cero, positiva o negativa, respectivamente.

2.2.1. Evolución afín de curvas

Sapiro y Tannenbaum (ver [?]) proponen una teoría de evolución de curvas planas pero desde el punto de vista afín. Para ello, consideran que las curvas evolucionan según la ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = f(\mu(p, t)) \mathbf{C}_{uu} \quad (12a)$$

$$\mathbf{C}(p, 0) = \gamma(p) \quad (12b)$$

donde u es el parámetro *longitud de arco afín* y $\mathbf{C}_{uu}$ es la *normal afín* y f una función de la curvatura afín.

A partir de la *ecuación de evolución euclídea básica*

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{C}_{ss}(p, t) = \kappa_0(p, t) \mathbf{n} \quad (13a)$$

$$\mathbf{C}(p, 0) = \gamma(p) \quad (13b)$$

donde s es el parámetro *longitud de arco euclídeo* y κ_0 la *curvatura con signo*, Sapiro y Tannenbaum (ver [?]) plantean una *ecuación afín* de evolución análoga a la (13) dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{C}_{uu} \quad (14a)$$

$$\mathbf{C}(p, 0) = \gamma(p) \quad (14b)$$

El objetivo es estudiar la ecuación (14) y obtener unos resultados análogos a los que obtienen Gage y Hamilton (ver [?]) y Grayson (ver [?]) en relación con la ecuación (13). Este último prueba que una curva plana cerrada se hace convexa cuando evoluciona según (13). En este sentido Sapiro y Tannenbaum (ver [?]) demuestran el siguiente teorema

Teorema 2 Sea $\mathbf{C}(\cdot, 0)$ una curva suave, convexa, cerrada e ‘embedded’ en el plano $\mathbb{R}^2$, entonces $\exists \epsilon > 0$ y una solución (clásica)

$$\mathbf{C} : S^1 \times [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

para una evolución afín del tipo (14)

En la demostración llegan a establecer la siguiente expresión para la ecuación de evolución (14a) (teniendo en cuenta (11)):

$$\mathbf{C}_t = \kappa_0(s)^{1/3} \mathbf{n}(s) - \frac{1}{3} \frac{(\kappa_0)_s}{\kappa_0^{5/3}} \cdot \mathbf{t}(s)$$

Estableciendo que la componente tangencial del vector velocidad ($\mathbf{C}_t$) sólo afecta a la parametrización de la familia de curvas en la evolución y no a su forma. De esta manera, la existencia de la familia de curvas queda determinada por la componente normal del vector velocidad. Esto es:

$$\kappa_0(s)^{1/3} \mathbf{n}(s)$$

Esto es importante porque se establece que la *ecuación de evolución afín* (14) es geoméricamente equivalente a:

$$\mathbf{C}_t = \kappa_0(s)^{1/3} \mathbf{n}(s) \quad (15)$$

siendo (15) perfectamente válida para curvas no convexas (ver [?]). Obtienen también, la versión afín del *teorema de Grayson* (ver [?]):

Teorema 3 Sea $\mathbf{C}(\cdot, 0) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva suave ‘embedded’ en el plano. Entonces existe $\mathbf{C} : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que cumple:

$$\mathbf{C}_t = \kappa_0(s)^{1/3} \mathbf{n}(s)$$

siendo suave y ‘embedded’ para todo $t < T$ y existe un $t_o < T$ tal que para todo $t > t_o$ la curva $\mathbf{C}(\cdot, t)$ es convexa.

3. Evolución y los conjuntos de nivel

Se trata ahora de relacionar los conceptos de evolución de curvas establecidos en la sección anterior, con el concepto de *conjunto de nivel* (*level sets*) generado al unir los punto de igual intensidad lumínica (*isofotos*). El planteamiento que se sigue es el establecido por Osher y Sethian (ver [?]).

Sea $\mathbf{C}(0)$ una *curva de Jordan* esto es, una curva simple, diferenciable (*infinitamente diferenciable*) y cerrada en $\mathbb{R}^2$. Sea pues, $\mathbf{C}(t)$ una familia de curvas dependientes de un parámetro $t \in [0, \infty)$ que se llamará *tiempo*, generadas por el movimiento (evolución) de la curva inicial ($\mathbf{C}(0)$) según el vector normal ($\mathbf{n}$) con una velocidad F , siendo F una función de la curvatura κ_0 , según lo establecido por la ecuación (5) ya planteada. Sea entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{C} : S^1 \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, t) &\mapsto \mathbf{C}(p, t) = (x(p, t), y(p, t)) \end{aligned} \quad (16)$$

una parametrización de la familia de curvas $\mathbf{C}(t)^2$, estableciendo además, que el interior de la curva queda a la izquierda si se avanza según el sentido de crecimiento del parámetro p . De esta manera la ecuación del movimiento dada por (5) se puede expresar:

$$x_t = -F(\kappa_0(t)) \frac{y_p}{(x_p + y_p)^{1/2}} \quad (17a)$$

$$y_t = F(\kappa_0(t)) \frac{x_p}{(x_p + y_p)^{1/2}} \quad (17b)$$

Esto es consecuencia de que si el vector tangente viene dado por:

$$\mathbf{t}(p, t) = \frac{1}{(x_p + y_p)^{1/2}} (x_p, y_p)$$

el vector normal, para que la orientación sea positiva, debe ser (ver (2)) de la forma:

$$\mathbf{n}(p, t) = \frac{1}{(x_p + y_p)^{1/2}} (-y_p, x_p)$$

Para tener una idea intuitiva de la ecuación (17), se puede pensar que F es la identidad, con lo cual se tendría:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \kappa_0 \mathbf{n}$$

esto quiere decir que si $\kappa_0 > 0$ entonces la evolución de la curva tiende en la dirección y sentido del vector $\mathbf{n}$ (cuyo sentido viene dado por la orientación de la parametrización), pero si $\kappa_0 < 0$ entonces el sentido de la evolución de la curva es opuesto al de $\mathbf{n}$.

²Se utiliza el mismo nombre tanto para la parametrización como para la familia de curvas $\mathbf{C}(\cdot, t) \equiv \mathbf{C}(t)$

Las ecuaciones (17) deben ser resueltas para $t \in [0, \infty)$ con $\mathbf{C}(p, 0) = \mathbf{C}(0)$ con $p \in [0, R]$. Las ecuaciones (17), nos expresan, en cierta manera, cómo se relacionan ambos parámetros p y t . Es claro que la curva inicial la curvatura κ_0 sería la dada por la expresión (4).

Ahora bien, como la parametrización $\mathbf{C}(p, t)$ (16) dada a esta familia de curvas es una aplicación inyectiva y diferenciable de cualquier orden, se trata de aplicar el **Teorema de la función inversa**. De esta forma, se tiene la aplicación:

$$\mathbf{C}(p, t) = (x(p, t), y(p, t)) \in \mathbb{R}^2$$

El *jacobiano* de la aplicación será:

$$\mathcal{J}\mathbf{C}(p, t) = \begin{vmatrix} x_p & x_t \\ y_p & y_t \end{vmatrix} = x_p \cdot y_t - x_t \cdot y_p \quad (18)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación del movimiento (17) resulta que:

$$\mathcal{J}\mathbf{C}(p, t) = x_p \cdot y_t - x_t \cdot y_p = F(\kappa_0) \frac{x_p^2}{(x_p + y_p)^{1/2}} + F(\kappa_0) \frac{y_p^2}{(x_p + y_p)^{1/2}} = F(\kappa_0) \cdot (x_p + y_p)^{1/2} \quad (19)$$

Así pues:

$$\mathcal{J}\mathbf{C}(p, t) \neq 0 \iff F(\kappa_0) \neq 0$$

Esto nos permite considerar una función inversa

$$\mathbf{C}^{-1}(x, y) = (g(x, y), f(x, y)) \quad (20)$$

diferenciable de cualquier orden, siendo:

$$p = g(x, y) \quad t = f(x, y)$$

Además el *Teorema de la función inversa* nos proporciona la diferencial de la inversa:

$$d\mathbf{C}^{-1}(x, y) = [d\mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}(x, y))]^{-1}$$

Es decir:

$$[\mathcal{J}\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} g_x & g_y \\ f_x & f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & x_t \\ y_p & y_t \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{F \cdot (x_p + y_p)^{1/2}} \begin{bmatrix} y_t & -x_t \\ -y_p & x_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

esto es:

$$f_x = -\frac{y_p}{F \cdot (x_p + y_p)^{1/2}} \quad f_y = \frac{x_p}{F \cdot (x_p + y_p)^{1/2}}$$

Es interesante darse cuenta que para cada valor $t_o \in [0, \infty)$ se tiene una curva $\mathbf{C}(p, t_o)$ que a su vez, por la ecuación (20), puede verse como la curva de nivel de la función f^3

$$t_o = f(x, y) \iff \mathbf{C}(p, t_o) = (x(p, t_o), y(p, t_o))$$

Esta expresión permite, utilizando el **Teorema de la función implícita**, expresar la variable y como función de x y de esta forma expresar la curvatura κ_0 en función de f .

³Es claro que no tiene sentido geométrico plantear una situación análoga con $g(x, y) = p_o$

Nota: Veamos cómo expresar la curvatura κ_o en función de la función f . Por el TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA resulta que la ecuación

$$t = f(x, y)$$

expresa a y como función implícita de x . Esto, es:

$$t = f(x, y(x))$$

y de esta forma representa una curva en el plano parametrizada de la forma:

$$(x, y(x))$$

El vector velocidad vendrá dado de la forma:

$$(1, y'(x))$$

y el vector aceleración:

$$(0, y''(x))$$

Sin embargo, al tratarse de una curva plana, se puede *reparametrizarla* y utilizar el parámetro *longitud de arco*. Con lo cual se tendría:

$$t = f(\mathbf{C}(s)) \iff t = f(x(s), y(s)) \quad \text{para cada } t \text{ fijo}$$

Derivando respecto del parámetro *longitud de arco* s se tendría:

$$f_x(x(s), y(s)) x'(s) + f_y(x(s), y(s)) y'(s) = 0 \iff f_x x'(s) + f_y y'(s) = 0 \quad (22)$$

Esto quiere decir que los vectores (f_x, f_y) y $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ son ortogonales. Así pues, como el vector:

$$(f_y, -f_x)$$

es ortogonal a (f_x, f_y) (positivamente orientado: pues el sentido del gradiente siempre corresponde al eje de las ordenadas) resulta que:

$$x'(s) = k f_y \quad (23a)$$

$$y'(s) = -k f_x \quad (23b)$$

para cierto $k \in \mathbb{R}$. Si se vuelve a derivar (22), se tiene:

$$f_{xx} (x'(s))^2 + f_{xy} x'(s) y'(s) + f_x x''(s) + f_{yx} y'(s) x'(s) + f_{yy} (y'(s))^2 + f_y y''(s) = 0 \quad (24)$$

si ahora se sustituye (23) resulta:

$$f_{xx} k^2 f_y^2 - 2k^2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} k^2 f_x^2 - \frac{1}{k} x''(s) y'(s) + \frac{1}{k} x'(s) y''(s) = 0 \quad (25)$$

esto es:

$$k^2 (f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2) = \frac{1}{k} (x''(s) y'(s) - x'(s) y''(s)) \quad (26)$$

o bien:

$$k^3 (f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2) = x''(s) y'(s) - x'(s) y''(s) \quad (27)$$

Teniendo en cuenta de nuevo (23) resulta:

$$\|\mathbf{t}(s)\|^2 = 1 = k^2 (f_x^2 + f_y^2) = k^2 \|\nabla f\|^2$$

Esto implica que:

$$k = \pm \frac{1}{\|\nabla f\|}$$

con lo cual sustituyendo en (27) se tiene:

$$x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) = \pm \frac{1}{\|\nabla f\|^3} (f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2) \quad (28)$$

y por último, se sustituye en (4) obteniéndose:

$$\kappa_0 = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \mp \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{\|\nabla f\|^3} \quad (29)$$

Por tanto el signo en esta ecuación dependerá del signo que se tome al considerar el valor de k . Por tanto puede decirse que existe una indeterminación. Veamos las dos posibles situaciones:

1. Supongamos que:

$$k = -\frac{1}{\|\nabla f\|}$$

Con el desarrollo establecido, esto implicaría que:

$$\kappa_0 = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{\|\nabla f\|^3} \quad (30)$$

Además con esta elección resultaría que por las ecuaciones (23) el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ tendría sentido opuesto al vector $(f_y, -f_x)$. Esto es, al recorrer la curva en el sentido que marca el vector tangente, el *interior* encerrado por la curva siempre queda a la **izquierda**. Por tanto si se considera una curva cerrada cuyo gradiente apunte ‘*hacia fuera*’ entonces implicaría además que:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

ya que la base de vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ siempre está positivamente orientada.

2. Supongamos ahora que:

$$k = \frac{1}{\|\nabla f\|}$$

De nuevo con el desarrollo establecido, se tiene que:

$$\kappa_0 = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{\|\nabla f\|^3} \quad (31)$$

Además por las ecuaciones (23) el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ tendría el mismo sentido que el vector $(f_y, -f_x)$. Esto es, al recorrer la curva en el sentido que marca el vector tangente el *interior* encerrado por la curva *siempre* queda a la **derecha**. Por tanto si se considera una curva cerrada cuyo gradiente apunte ‘*hacia fuera*’ entonces implicaría además que:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

ya que la base de vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ siempre está positivamente orientada.



Seguidamente se presentan unos resultados obtenidos por Osher y Sethian (ver [?]) relacionados con la función f .

Proposición 1 *Si $\mathbf{C}(t)$ es una curva suave y simple entonces f definida mediante (20) verifica la ecuación en derivadas parciales*

$$F^2(\kappa_0)(f_x^2 + f_y^2) = 1 \quad (32)$$

Esta proposición es importante porque nos expresa que la relación entre las variables x e y y el parámetro t no es una relación cualquiera. Por otra parte, esto es algo que ya se sabía por medio de la ecuación del movimiento (17).

El siguiente resultado viene a decir que las curvas de nivel de $t = f(x, y)$, con f obtenido de (20), son curvas características de (32)

Proposición 2 *Dada una constante t_o y sea $\mathbf{C}(t_o)$ la curva de nivel de f dada por (20), esto es:*

$$t_o = f(x_o(s), y_o(s))$$

*entonces $\mathbf{C}(t_o)$ es una **curva característica** de la ecuación (32)*

Estos resultados permiten ver el problema de evolución (17) de la siguiente manera. Puesto que el objetivo es determinar $\mathbf{C}(t)$, mediante la ecuación (32), se transforma el problema y se trata de determinar f para los distintos valores de t . Pero a su vez este problema se puede plantear cómo la obtención de una función $I(x, y, t) = k$ tal que $t = f(x, y)$. De esta manera la ecuación (32) debe expresarse en función de la nueva *función* I . De esta forma, y teniendo en cuenta:

$$I(x, y, f(x, y)) = k$$

se deriva respecto de x

$$I_x + I_t \cdot f_x = 0 \implies f_x = -\frac{I_x}{I_t}$$

y análogamente respecto de y :

$$I_y + I_t \cdot f_y = 0 \implies f_y = -\frac{I_y}{I_t}$$

y sustituyendo en (32):

$$F^2 \cdot (f_x^2 + f_y^2) = 1 \implies F^2 \cdot (I_x^2 + I_y^2) = I_t^2$$

Por tanto hay dos posibles soluciones:

$$F \cdot (I_x^2 + I_y^2)^{1/2} = I_t$$

o

$$F \cdot (I_x^2 + I_y^2)^{1/2} = -I_t$$

Se tomará la primera de ellas:

$$I_t - F \cdot \|\nabla I(x, y)\| = 0$$

además para cada t_o , resulta que la función $I(x, y, t_o) = k$ es una curva plana, con lo cual se puede obtener una expresión de la curvatura en función de I (derivando implícitamente), análoga a la expresión (29). Esto es:

$$I_t = F \left(-\frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}} \right) \cdot \|\nabla I(x, y)\|$$

Si se supone que F es la identidad (que sería la situación más sencilla) resultaría:

$$I_t = -\frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}} \cdot \|\nabla I(x, y)\| = \text{curv}(I) \cdot \|\nabla I(x, y)\| \quad (33)$$

Es importante señalar que el signo de la curvatura que aparece en (33) es en cierta manera, artificial, pues la curvatura que se está considerando tiene signo y lo único que hay que ajustar es el sentido en el que se recorre la curva. Con lo cual, también podría escribirse la ecuación de la forma:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_t = \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}} \cdot \|\nabla I(x, y)\| = \text{curv}(I) \cdot \|\nabla I(x, y)\| \quad (34)$$

3.1. Orientaciones

La expresión (34) es muy importante ya que después se relacionará con otras formulaciones. Sin embargo es interesante señalar las diferencias entre las formulaciones (33) y (34). La cuestión está en la parametrización que se establece en la curva que define la función:

$$I(x, y, t_o) = k$$

Sabemos que esta ecuación define *implícitamente* una curva plana, con una posible parametrización $(x, y(x))$. Entonces reparametrizando *por longitud de arco*, el *vector velocidad* vendría dado por:

$$\mathbf{t} = (x'(s), y'(s))$$

Si se trata de una curva *simple* cerrada, se puede imponer el criterio de que la orientación debe ser tal, que al recorrer la curva un caminante el interior quede a su izquierda (esta es la que impone Osher y Sethian [?]). Es obvio que esta imposición determina la orientación de $\mathbf{t}$ y por tanto de $\mathbf{n}$. Esto implicaría que los arcos de curva convexos (arcos de circunferencia) tendrían $\kappa_0 > 0$ y los arcos de curva cóncavos (arcos de parábola) $\kappa_0 < 0$ ⁴. Si además se supone que ∇I siempre apunta hacia afuera, el resultado es:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$$

Como consecuencia (ver ecuación (30)):

$$\kappa_0 \cdot \|\nabla I(x, y)\| = \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}} \cdot \|\nabla I(x, y)\| = \text{curv}(I) \cdot \|\nabla I(x, y)\| \quad (35)$$

Una de las razones de escribir esta comunicación es justificar que el signo de expresiones del tipo $\text{div}(c(\|\nabla I\|) \nabla I)$ nos indique que la curva es cóncava (arco de parábola) o convexa (arco de circunferencia). Para ello es necesario relacionar las formulaciones de la *curvatura con signo* con la fórmula $\text{div}(c(\|\nabla I\|) \nabla I)$.

⁴Se impone el criterio de que el observador que decide si el arco es cóncavo o convexo, está en la región interior que acota la curva cerrada

4. Evolución de curvas y el laplaciano orientado

Esta sección se trata de establecer la relación existente entre la expresión (35) con la expresión:

$$\Delta I \equiv \text{div}(\nabla I) = I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} \quad \text{laplaciano orientado} \quad (36)$$

siendo η vector unitario paralelo y con el mismo sentido al gradiente de I y ξ el vector unitario ortogonal a η *positivamente orientado*.

Inicialmente se supondrá, como ya se ha hecho anteriormente, que $I(x, y, t) = k$ (para cada valor de t) define una curva cerrada simple, de tal manera que el vector ∇I apunta hacia el exterior de la curva (o lo que es lo mismo, la función I crece hacia el exterior de la curva). Así pues, se definen:

$$\eta = \frac{1}{\|\nabla I\|} \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right) \equiv \frac{1}{\|\nabla I\|} (I_x, I_y) \quad (37a)$$

$$\xi = \frac{1}{\|\nabla I\|} \left(\frac{\partial I}{\partial y}, -\frac{\partial I}{\partial x} \right) \equiv \frac{1}{\|\nabla I\|} (I_y, -I_x) \quad (37b)$$

Ambos vectores así definidos, conservan la orientación positiva, pues:

$$\xi \times \eta = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ I_y & -I_x & 0 \\ I_x & I_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} (I_x^2 + I_y^2) \mathbf{k} = \mathbf{k} \quad (38)$$

De esta forma se obtiene una nueva base:

$$B' = \{\xi, \eta\}$$

Si se define I_{ξ} como la *derivada direccional* de I en la dirección de ξ , entonces claramente esta variación es nula, ya que:

$$I_{\xi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(\mathbf{x} + t\xi) - I(\mathbf{x})}{t} = \langle \nabla I, \xi \rangle = 0$$

Por tanto, nos planteamos la variación de ∇I respecto ξ y η . La situación es parecida cuando se tiene una función de una variable $h(x)$ para la cual $h'(x) = 0$, esto nos lleva a estudiar la derivada segunda $h''(x)$. Es por ello que nos planteamos la variación de ∇I . Este concepto se expresa con la *derivada covariante* de ∇I respecto ξ y η . Así pues:

$$\nabla_{\xi}(\nabla I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla I(\mathbf{x} + t\xi) - \nabla I(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{I}_{\xi} \quad (39a)$$

$$\nabla_{\eta}(\nabla I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla I(\mathbf{x} + t\eta) - \nabla I(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{I}_{\eta} \quad (39b)$$

Es importante distinguir entre las notaciones:

$$I_{\xi} \neq \mathbf{I}_{\xi}$$

y

$$I_{\eta} \neq \mathbf{I}_{\eta}$$

De esta forma:

$$\nabla I \equiv \mathbf{w} = \frac{\partial I}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial I}{\partial y} \mathbf{j} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} \quad (40)$$

y utilizando las propiedades de la *derivada covariante*:

$$\nabla_{\xi}(\mathbf{w}) = \xi^1 \nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{w} + \xi^2 \nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{w} \quad (41)$$

siendo $\xi = \xi^1 \mathbf{i} + \xi^2 \mathbf{j}$. Además como:

$$\nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{w} = \frac{\partial w^1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w^2}{\partial x} \mathbf{j} + \overbrace{\nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{i} + \nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{j}}^{=0} = I_{xx} \mathbf{i} + I_{xy} \mathbf{j} \quad (42a)$$

$$\nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{w} = \frac{\partial w^1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial w^2}{\partial y} \mathbf{j} + \overbrace{\nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{i} + \nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{j}}^{=0} = I_{xy} \mathbf{i} + I_{yy} \mathbf{j} \quad (42b)$$

matricialmente resulta:

$$[\nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{w}, \nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{w}] = [\nabla_{\mathbf{i}} (\nabla I), \nabla_{\mathbf{j}} (\nabla I)] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} = \mathcal{H} \quad \text{Hessiano de I} \quad (43)$$

sustituyendo seguidamente (42) en (41) y teniendo en cuenta (37b) resulta:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \mathbf{w} &\equiv \nabla_{\xi} (\nabla I) = \frac{1}{\|\nabla I\|} [I_y (I_{xx} \mathbf{i} + I_{xy} \mathbf{j}) - I_x (I_{xy} \mathbf{i} + I_{yy} \mathbf{j})] \\ &= \frac{1}{\|\nabla I\|} [(I_y I_{xx} - I_x I_{xy}) \mathbf{i} + (I_y I_{xy} - I_x I_{yy}) \mathbf{j}] \end{aligned} \quad (44)$$

Ahora se multiplica escalarmente la expresión (44) por ξ :

$$I_{\xi\xi} \equiv \xi \cdot \nabla_{\xi} \mathbf{w} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} [I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}] \quad (45)$$

cuya expresión matricial sería:

$$I_{\xi\xi} \equiv \xi \cdot \nabla_{\xi} \mathbf{w} = [\xi]^t \cdot \mathcal{H} \cdot [\xi] \quad (46)$$

A continuación se realiza un proceso análogo con η :

$$\nabla_{\eta}(\mathbf{w}) = \eta^1 \nabla_{\mathbf{i}} \mathbf{w} + \eta^2 \nabla_{\mathbf{j}} \mathbf{w} \quad (47)$$

siendo $\eta = \eta^1 \mathbf{i} + \eta^2 \mathbf{j}$. Teniendo en cuenta (42) y (37a) y sustituyendo en (47) resulta:

$$\nabla_{\eta} \mathbf{w} \equiv \nabla_{\eta} (\nabla I) = \frac{1}{\|\nabla I\|} [(I_x I_{xx} + I_y I_{xy}) \mathbf{i} + (I_x I_{xy} + I_y I_{yy}) \mathbf{j}] \quad (48)$$

Ahora se multiplica escalarmente la expresión (48) por η :

$$I_{\eta\eta} \equiv \eta \cdot \nabla_{\eta} \mathbf{w} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} [I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}] \quad (49)$$

cuya expresión matricial sería:

$$I_{\eta\eta} \equiv \eta \cdot \nabla_{\eta} \mathbf{w} = [\eta]^t \cdot \mathcal{H} \cdot [\eta] \quad (50)$$

Si ahora sumamos las ecuaciones (45) y (49) resulta:

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} &= \xi \cdot \nabla_{\xi} (\nabla I) + \eta \cdot \nabla_{\eta} (\nabla I) = \\ &= [\xi]^t \cdot \mathcal{H} \cdot [\xi] + [\eta]^t \cdot \mathcal{H} \cdot [\eta] = \\ &= \frac{1}{\|\nabla I\|^2} [(I_x^2 + I_y^2) I_{xx} + (I_x^2 + I_y^2) I_{yy}] = \\ &= \frac{1}{\|\nabla I\|^2} [(I_x^2 + I_y^2)] [I_{xx} + I_{yy}] = \\ &= \Delta I = \text{div}(\nabla I) \end{aligned} \quad (51)$$

Para establecer la relación con la ecuación (34), es necesario hacer algunas operaciones más.

Supongamos que $c(x)$ es una función real suficientemente derivable. Se trata de calcular $\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I)$, operando resulta:

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = c(\|\nabla I\|) \cdot \Delta I + c'(\|\nabla I\|) \left[\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \|\nabla I\| + \frac{\partial I}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \|\nabla I\| \right] \quad (52)$$

Derivamos cada una de las expresiones independientemente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \|\nabla I\| = \frac{1}{\|\nabla I\|} [I_x I_{xx} + I_y I_{xy}] \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \|\nabla I\| = \frac{1}{\|\nabla I\|} [I_x I_{xy} + I_y I_{yy}] \quad (54)$$

sustituyendo (53) y (54) en (52), se tiene:

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = c(\|\nabla I\|) \cdot \Delta I + c'(\|\nabla I\|) \frac{1}{\|\nabla I\|} [I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}] \quad (55)$$

pero teniendo en cuenta (49):

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = c(\|\nabla I\|) \cdot \Delta I + c'(\|\nabla I\|) \|\nabla I\| I_{\eta\eta} \quad (56)$$

Si además se tiene en cuenta también (51) entonces:

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = c(\|\nabla I\|) \cdot (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}) + c'(\|\nabla I\|) \|\nabla I\| I_{\eta\eta} \quad (57)$$

Así pues, operando se llega a:

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = \overbrace{c(\|\nabla I\|)}^{c_\xi} I_{\xi\xi} + \overbrace{[c(\|\nabla I\|) + c'(\|\nabla I\|) \|\nabla I\|]}^{c_\eta} I_{\eta\eta} \quad (58)$$

Esto es:

$$\text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) = c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta}$$

Si se supone ahora que se tiene como función c la dada por:

$$c(\|\nabla I\|) = \frac{1}{\|\nabla I\|} \implies c'(\|\nabla I\|) = -\frac{1}{\|\nabla I\|^2}$$

Sustituyendo en (58) resulta:

$$\text{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) = \frac{1}{\|\nabla I\|} I_{\xi\xi} + \left[\frac{1}{\|\nabla I\|} - \frac{1}{\|\nabla I\|^2} \|\nabla I\| \right] I_{\eta\eta} = \frac{1}{\|\nabla I\|} I_{\xi\xi} \quad (59)$$

Es decir:

$$\text{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \|\nabla I\| = I_{\xi\xi} \quad (60)$$

Ahora bien, para relacionar el *laplaciano orientado* (60) con la *curvatura* es necesario *orientar* la curva. Si se establece el sentido de recorrido habitual ⁵ sobre la curva cerrada simple, entonces

⁵Aquella que al recorrer la curva, el interior de la región que acota, queda a la izquierda

se considera la expresión (35). De esta manera, resulta que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \|\nabla I\| &= I_{\xi\xi} = \xi \cdot \nabla_{\xi} (\nabla I) \stackrel{(45)}{=} \frac{1}{\|\nabla I\|^2} [I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}] = \\
 &= \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{\|\nabla I\|^3} \|\nabla I\| = \\
 &\stackrel{(35)}{=} \operatorname{curv}(I) \|\nabla I\| = \kappa_0 \|\nabla I\|
 \end{aligned} \tag{61}$$

Para concluir, la ecuación de evolución quedaría de la forma:

$$\boxed{\partial_t I = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \|\nabla I\| = I_{\xi\xi} = \xi \cdot \nabla_{\xi} (\nabla I) = \operatorname{curv}(I) \|\nabla I\| = \kappa_0 \|\nabla I\|} \tag{62}$$

Con lo cual, con los criterios de orientación escogidos (al recorrer la curva cerrada, su interior siempre queda a la izquierda y además el gradiente se considera que siempre apunta hacia el exterior) resulta que si:

- $\kappa_0 > 0$ (convexa, *arco de circunferencia*) entonces la curva tiende a contraerse puesto que la *evolución* es de la forma $\mathbf{C}_t = \kappa_0 \mathbf{n}$ y la normal es opuesta al sentido del gradiente.
- $\kappa_0 < 0$ (cóncava, *arco de parábola*) entonces la curva tiende a expandirse puesto que la *evolución* es de la forma $\mathbf{C}_t = \kappa_0 \mathbf{n}$ y la normal es opuesta al sentido del gradiente.