

Convolución

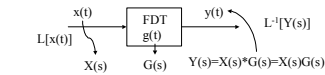
■ Señal y sistema

■ Convolución:

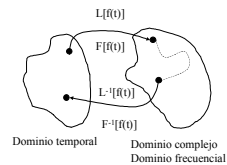
- continua
- discreta

■ Transformadas

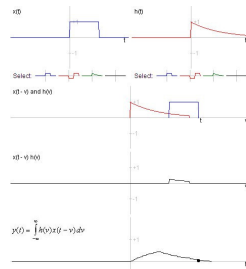
- Fourier



$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau$$



Demo de convolución continua



<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

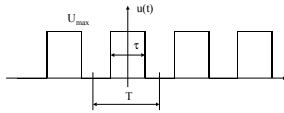
Series de Fourier

- Sea una función periódica temporal, $f(t)$, de periodo de T , acotada en un intervalo, con un número finito de máximos, mínimos y puntos discontinuos, ésta puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos. A esta serie se la llama de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

Ejemplo

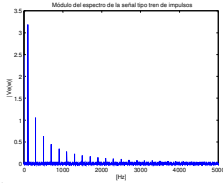


$$f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0$$

$$f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_{\max} dt = U_{\max} \frac{\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_{\max} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2U_{\max}}{\pi} \operatorname{senc}\left(n \cdot \pi \frac{\tau}{T}\right)$$

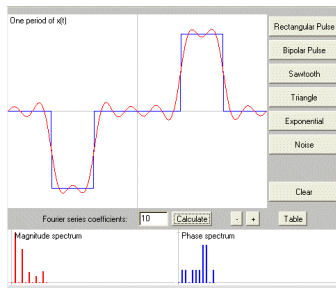


$$a_0 = 2.5V \quad a_1 = 3.18V(100Hz) \quad a_2 = 0V(200Hz) \quad a_3 = -1.06V(300Hz)$$

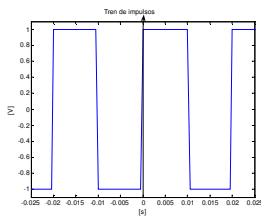
$$a_4 = 0V(400Hz) \quad a_5 = 0.635V(500Hz) \quad a_6 = 0V(600Hz) \quad a_7 = -0.45V(700Hz), \dots$$

Applet de Fourier

www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html



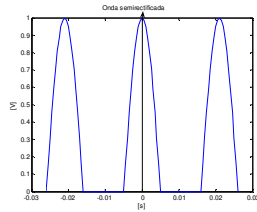
Serie de Fourier para tren de pulsos



$$u_e = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{senc}(n \cdot 100\pi \cdot t)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

Señal semirectificada



$$u_e = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot 100\pi \cdot t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{n+1} - \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{n-1} \right]$$

De las series a las transformadas de Fourier

- Segunda y tercera forma de expresar las series de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \psi_n) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \psi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- Relaciones de Euler

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

De las series a las transformadas de Fourier

- Tercera forma de expresar las series de Fourier:

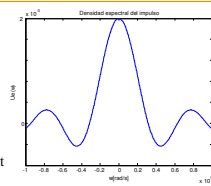
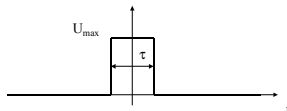
$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

- Para la aplicación de la serie de Fourier sobre señales aperiódicas, se procede al artificio matemático de hacer que el periodo de la señal sea infinito, convirtiendo todas las señales en periódicas. relaciones de Euler

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty$$

Ejemplo 2



$$U_s(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = 2U_{\max} \frac{\text{sinc}(\omega\tau/2)}{\omega} = U_{\max} \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\omega\tau/2)$$