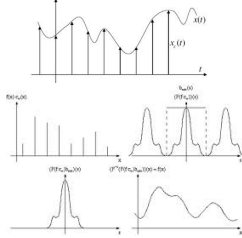
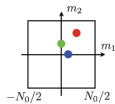


Teorema del muestreo

- Teorema de Shanon

- La frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble del ancho de banda de la señal.

- Las imágenes se descomponen en frecuencias verticales y horizontales.



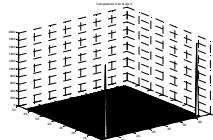
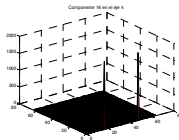
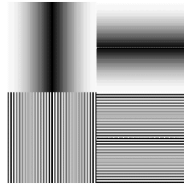
Teorema del muestreo

- Teorema de Shanon

- Alta frecuencia-> bordes, ruido.

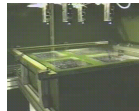
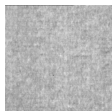
- Baja frecuencia-> áreas homogéneas

- El detalle más pequeño deberá de tener un entorno de 2x2



Ejemplo 1

Para la inspección de la pasta de papel se ha conseguido, según un modelo de simulación, una iluminación uniforme a contraluz de 200 mm x 275 mm (en una relación próxima a los 3/4) y el defecto más pequeño a detectar tiene un área de 1 mm². Con el objeto de reducir las aberraciones ópticas, se ha cerrado el diafragma con un elevado número F. Con ello y tras el análisis radiométrico se ha demostrado que si se emplea una cámara WATEC 902 con una lente de 16 mm, la pasta de papel debe de estar alrededor de los 700 mm en vertical. Determinar si es correcta la elección realizada

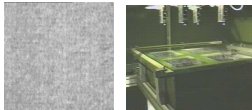


Ejemplo 1

Según el fabricante de la cámara, ésta tiene para el estándar CCR 582 filas por 752 columnas y el tamaño del píxel es $8.3\mu\text{m}$ por $8.6\mu\text{m}$. Tomando como propósito un entorno de 3×3 píxeles para el defecto de 1mm^2 , el factor de magnificación ponderado será:

$$M^2 = \frac{9 \cdot 8.3 \cdot 10^{-6} \cdot 8.6 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} \quad M = 0.0253$$

$$X = \frac{582 \cdot 8.3 \cdot 10^{-3}}{M} = 190.6\text{mm} \quad Y = \frac{752 \cdot 8.6 \cdot 10^{-3}}{M} = 255.2\text{mm}$$



$$Z = \frac{f}{M} = 632\text{mm}$$

Teoría de la Señal(1/3)



- Imágenes: señales 2D
- Procesamiento lineal: convolución entre señal y sistema

$$\{y_k\} = \{g_k\} * \{x_k\} = \{x_k\} * \{g_k\} \quad y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{k-n} x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{k-n} g_n$$

- Secuencia de ponderación

$$\{g_k\} = \{\dots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \dots\} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k = 1$$

- Extensión a 2D (máscara de convolución):

$$y_{k,j} = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 x_{k-m, j-n} g_{m,n} \quad \begin{pmatrix} g_{-1,-1} & g_{-1,0} & g_{-1,1} \\ g_{0,-1} & g_{0,0} & g_{0,1} \\ g_{1,-1} & g_{1,0} & g_{1,1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{k-1,j-1} & x_{k-1,j} & x_{k-1,j+1} \\ x_{k,j-1} & x_{k,j} & x_{k,j+1} \\ x_{k+1,j-1} & x_{k+1,j} & x_{k+1,j+1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

- Dada la ecuación en diferencia:

$$y_k = \frac{1}{4}x_k + \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{1}{4}x_{k-2}$$

obtener la secuencia de ponderación y determinar la salida ante una entrada en escalón.

Ejemplo 2

$$y_k = \frac{1}{4}x_k + \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{1}{4}x_{k-2}$$

K	x _k	x _{k-1}	x _{k-2}	y _k
0	1	0	0	0.25
1	0	1	0	0.5
2	0	0	1	0.25

$$\{g_k\} = [1 \ 2 \ 1] \frac{1}{4}$$

Resolución en MATLAB

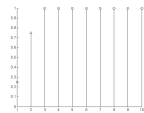
```
>> g = [1;2;1]/4;
>> x = ones(10,1);
>> y = conv(x,g);
>> stem(y(1:10));
```

$$y_0 = \sum_{n=0}^2 x_{k-n} g_n = 0.25$$

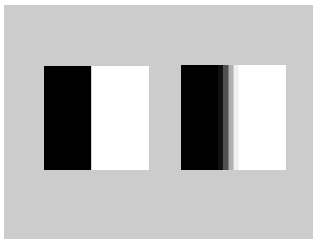
$$y_1 = \sum_{n=0}^2 x_{k-n} g_n = 0.25 + 0.5 = 0.75$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^2 x_{k-n} g_n = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1$$

...



Extensión del ejemplo a 2D

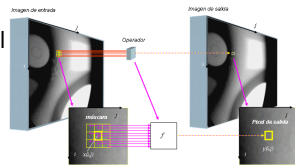


Teoría de la Señal(2/3)

Combinación lineal

Resultados

- Imagen(K,L)
- Máscara(M,N)
 - (K+M-1)(L+N-1)
 - (K,L)
 - (K-M+1)(L-N+1)



$$y_{k,l} = \sum_{m=-l}^{l-1} \sum_{n=-l}^{l-1} x_{k-m,l-n} g_{m,n} = x_{k,l} \cdot g_{0,0} + x_{k,l-1} \cdot g_{0,1} + x_{k,l+1} \cdot g_{0,-1} + \\ x_{k+1,l} \cdot g_{-1,0} + x_{k+1,l-1} \cdot g_{-1,1} + x_{k+1,l+1} \cdot g_{-1,-1} + \\ x_{k-1,l} \cdot g_{1,0} + x_{k-1,l-1} \cdot g_{1,1} + x_{k-1,l+1} \cdot g_{1,-1}$$

Ejemplo 3

- Determinar el resultado de la convolución discreta 2D para el filtro FIR binomial {1,2,1} y su traspuesta.

$$(1 \ 2 \ 1) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución en MATLAB

```
>> g= [1;2;1]/4;  
>> conv2(g,g')
```

Ejemplo 3

- Determinar la imagen de salida cuando ésta es procesada por un filtro binomial de 3 x 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 200 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & 200 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 200 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & 200 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 37.5 & 50 & 37.5 & 12.5 & 0 \\ 0 & 37.5 & 100 & 125 & 100 & 37.5 & 0 \\ 0 & 50 & 125 & 150 & 125 & 50 & 0 \\ 0 & 37.5 & 100 & 125 & 100 & 37.5 & 0 \\ 0 & 12.5 & 37.5 & 50 & 37.5 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

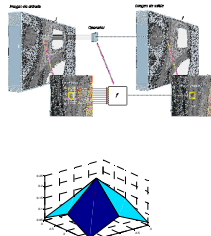
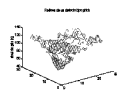


Teoría de la Señal(3/3)

■ Correlación

□ Búsqueda de patrones

$$y_{k,j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{k+m,j+n} g_{m,n}$$



Ejercicio 4

- Dada la siguiente imagen, calcular para el píxel marcado el resultado de la convolución con las dos máscaras de Prewitt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 10 & \bullet & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

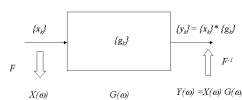
Respuesta en frecuencia(1/2)

■ Respuesta en frecuencia normalizada

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \quad G_k = \sum_{n=0}^{K-1} g_n e^{-j\frac{2\pi k}{K} n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

■ Secuencia de ponderación

$$g_n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} G_k e^{j\frac{2\pi k}{K} n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



Ejemplo 5

- Determinar la respuesta en frecuencia de un sistema discreto cuya secuencia de ponderación es $\{1/4, 1/2, 1/4\}$.

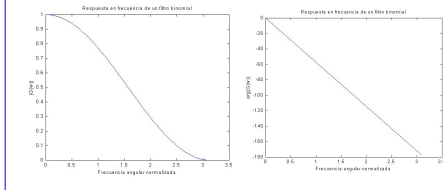
$$G(\omega) = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-j\omega n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

ω	$G(\omega)$	Magnitude	Angle
0	1	1	0
$\pi/64$	0.99-j0.049	0.999	-2.81°
$2\pi/64$	0.99-j0.097	0.997	-5.62°
...	...	...	...
$63\pi/64$	-0.0006-j0.00003	0.0006	-178°

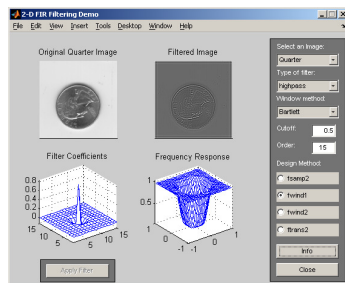
Ejemplo 5

Resolución en MATLAB

```
>> [G,W] = freqz([1/4,1/2,1/4], 1,128);
>> plot(W,abs(G));
>> plot(W,angle(G).*(180/pi));
```

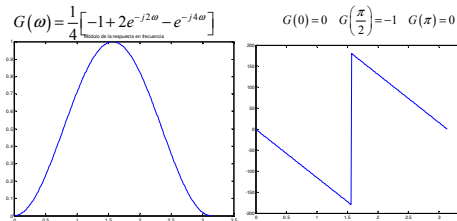


firdemo



Ejercicio 6

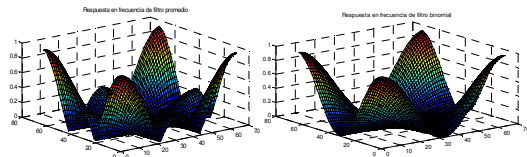
- Demostrar que el filtro FIR, cuya secuencia de ponderación es $\{g_k\} = \frac{1}{4} \{-1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1\}$, corresponde a un filtro paso banda.



Extensión a imágenes digitales(1/2)

- Respuesta en frecuencia de una máscara de convolución

$$G_{k,l} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N g_{m,n} e^{-j\frac{2\pi k}{K}m} e^{-j\frac{2\pi l}{L}n} \quad k=0,1,2,\dots,K-1 \quad l=0,1,2,\dots,L-1$$



Ejemplo 7

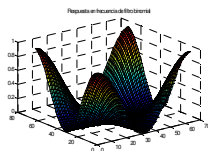
- Determinar la respuesta frecuencia del filtro binomial 2D:

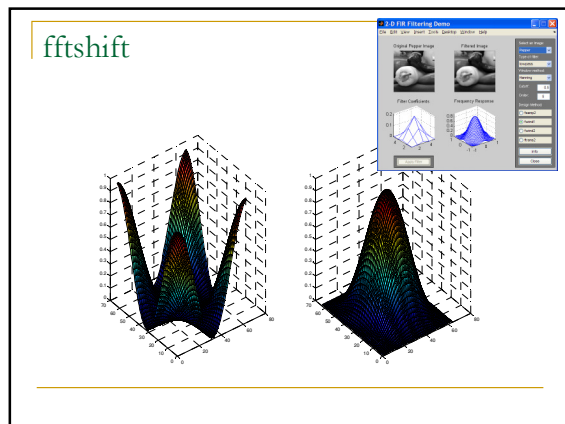
$$\{g_{m,n}\} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{k,l} = \frac{1}{16} \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 g_{m,n} e^{-j\frac{2\pi k}{K}m} e^{-j\frac{2\pi l}{L}n} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{K}} + e^{-j\frac{4\pi k}{K}} + 2e^{-j\frac{2\pi k}{K}} e^{-j\frac{2\pi l}{L}} + 2e^{-j\frac{2\pi k}{K}} e^{-j\frac{4\pi l}{L}} + e^{-j\frac{4\pi k}{K}} e^{-j\frac{2\pi l}{L}} + e^{-j\frac{4\pi k}{K}} e^{-j\frac{4\pi l}{L}}$$

Resolución en MATLAB

```
>> V=fft2(conv2([1 2 1],[1 2 1]),64,64);
>> surf(abs(V))
```





Respuesta en frecuencia(2/2)

- Transformadas discretas de Fourier

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{K}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1 \quad x_n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{K}kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Relación fundamental

Ejemplo 8

- Dada la respuesta en frecuencia de un filtro discreto unidimensional de orden 2 :

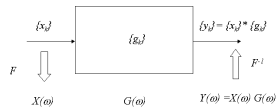
$$G_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{K}k} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{K}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

- y siendo la excitación al sistema,
 $\{x_k\} = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$
- calcular la secuencia de salida.

Ejemplo 8

$$\{x_k\} = \{1, 1, 0, 0, \dots\} \longrightarrow X_k = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{K}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$

$$Y_k = \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{K}k}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{K}k} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{4\pi}{K}k}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{K}k} + \frac{3}{4}e^{-j\frac{4\pi}{K}k} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{6\pi}{K}k}$$



$$\{y_k\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

Ejemplo 8

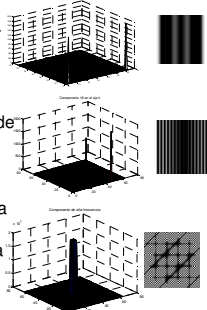
Resolución en MATLAB

```
>> Xw = fft([1;1], 64);
>> Gw = fft([1;2;1]/4, 64);
>> Yw = Xw .* Gw;
>> yk = ifft(Yw)
    0.25
    0.75
    0.75
    0.25
     0
    ...
```

Extensión a imágenes digitales(2/2)

■ Transformadas de Fourier

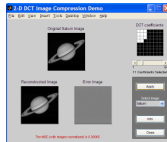
- La transformada de Fourier muestra que una imagen puede ser construida por la combinación de armónicos de frecuencias verticales y horizontales.
- A mayor frecuencia más transiciones de la luminancia en menos píxeles, en la dirección determinada por la componente



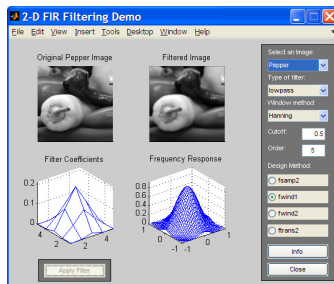
Extensión a imágenes digitales(2/2)

■ Aplicaciones

- Eliminación del ruido
- Realce de bordes
 - Alto coste computacional
 - FFT: $N \log_2(N)$
- Compresión



firdemo



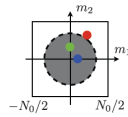
Propiedades de la descomposición en base ortogonales

- Tipo: Fourier & wavelets
- Propiedades:
 - Seleccionando unos pocos coeficientes mantiene la mayoría de la energía de la señal.
- Aplicaciones
 - Compresión
 - Eliminación del ruido
 - Superresolución



Procedimiento

1. Obtener los coeficientes de la transformada
 - FFT $O(n \log(n))$, Wavelet $O(n)$
2. Selección de los coeficientes
3. Reconstrucción de la señal



Procesamiento lineal & no lineal

- Selección de los coeficientes

$$f = \sum_m \langle f, \psi_m \rangle \psi_m \xrightarrow{\text{aproximación}} f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, \psi_m \rangle \psi_m$$

- Lineal

- I_M no depende de f . Por ejemplo: $I_M = \{M - \text{primeros armónicos}\}$

- No lineal

- I_M depende de f . $I_M = \{m \mid |\langle f, \psi_m \rangle| > T\}$